Análisis Numérico y Optimización Introducción al Método del Elemento Finito Para EDO

CIMAT/Unidad Monterrey

Maestría en Cómputo Estadístico
E. Uresti

Generales

El **Método de Elementos Finitos** (MFE o FEM por su siglas en inglés) es un método numérico para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales.

- Tiene alta aplicabilidad en Ingeniería: Imprescindible en Ingeniería Civil e Ingeniería Macánica.
- Inició con la venida de las computadoras: M. J. Turner, R.W. Cough, H.C. Martin, and I.J. Topp: Stiffnes and Deflections. Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, Volumen 23, Issue 9. 1956. Richard Courant and David Hilbert 1924
- El primer libro matemático en 1973: Gilbert Strang and George Fix: Analysis of the Finite Element Method.
- Tiene alto interés económico y científico: Paquetes. Journals. Libros. Programas Académicos. Centros. NAG.

FEM

Suponga que se desea resolver el problema:

$$\text{ED:} -u''(x) = f(x)\,, \;\; \Omega : 0 < x < 1\,, \;\; \text{CF} : u(0) = 0\,, \;\; u(1) = 0$$

PASO 1 Se construye una formulación Variacional o Débil: se multiplica por una *función de prueba* $v(x)$ que cumple las condiciones de frontera $v(0) = 0$ y $v(1) = 0$:

$$-u''(x) = f(x) \quad \Rightarrow -u'' - f = 0 \quad \Rightarrow v \cdot (-u'' - f) = 0$$

y se integra en el dominio:

$$\int_\Omega v\,(-u'' - f)\,dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 (-u''\,v)\,dx & = \; -\,u'\,v|_0^1 + \int_0^1 u'\,v'\,dx \\ & = \; \displaystyle\int_0^1 u'\,v'\,dx = \int_0^1 f\,v\,dx \end{cases}$$

La solución u debe cumplir lo anterior para toda v.

PASO 2 Se divide la región en una serie de **elementos**:

$$x_0 = 0,\ x_1 = x_0 + h_1, x_2 = x_1 + h_2, \ldots x_n = x_{n-1} + h_n = 1 \quad h_i > 0$$

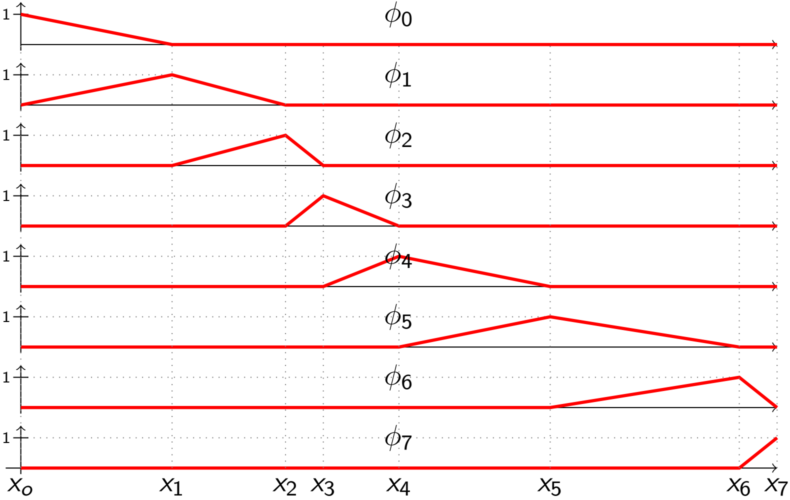
$$E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

PASO 3 Basados en los elementos se construyen una serie de funciones básicas ϕ_i definidas en forma seccionada. El conjunto suporte de la función ϕ_i es la unión de dos elementos adyacentes. Por ejemplo, usando las funciones *hat*:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

En los extremos del dominio sólo aplica una de las expresiones. Las funciones ϕ_i valen cero en los extremos x_{i-1} y x_{i+1} y vale 1 en el punto central x_i.

Funciones Básicas: Hat

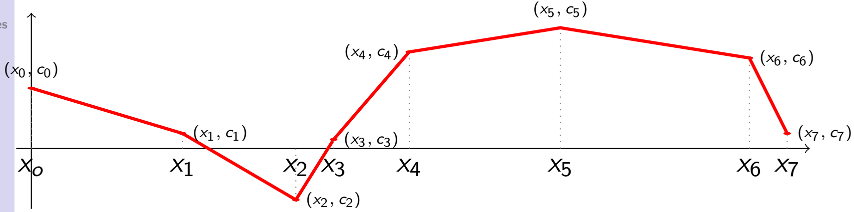


En cada *elemento* $E_i = [x_i, x_{i+1}]$ sólo dos funciones no son cero.

Combinación Lineal

Las combinaciones lineales de las funciones ϕ_i sobre la partición resulta en una función continua y diferenciable salvo en los nodos interiores. Por ejemplo, para $c_0 = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = -1.7$, $c_3 = 0.3$, $c_4 = 3.2$, $c_5 = 4$, $c_6 = 3$ y $c_7 = 0.5$:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{7} c_i\, \phi_i(x)$$



En cada punto x_i de la partición, $\phi(x_i) = c_i$.

CONTINUACIÓN

PASO 4 Aproxime la solución por una combinación lineal de las funciones base:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\phi_i(x)$$

donde los coeficientes c_i son constantes a determinar. Obtendremos un sistema de ecuaciones lineales usando la forma integral:

$$\int_0^1 u_h'\,v'\,dx \approx \int_0^1 f\,v\,dx \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_0^1 \phi_i'\,v'\,dx \approx \int_0^1 f\,v\,dx$$

Ahora, en lugar de cualquier función v, utilice las funciones base $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ para obtener un sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas c_i.

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_0^1 \phi_i' \, v' \, dx \approx \int_0^1 f \, v \, dx$$

Desarrollando la sumatoria y tomando en lugar de v las funciones ϕ_1, ϕ_2,...,ϕ_{n-1}:

$$\begin{array}{rcl}
\left(\int_0^1 \phi_1'\phi_1' dx\right) c_1 + \cdots + \left(\int_0^1 \phi_1'\phi_{n-1}' dx\right) c_{n-1} & = & \int_0^1 f\,\phi_1 dx \\
\left(\int_0^1 \phi_2'\phi_1' dx\right) c_1 + \cdots + \left(\int_0^1 \phi_2'\phi_{n-1}' dx\right) c_{n-1} & = & \int_0^1 f\,\phi_2 dx \\
 & \vdots & \\
\left(\int_0^1 \phi_i'\phi_1' dx\right) c_1 + \cdots + \left(\int_0^1 \phi_i'\phi_{n-1}' dx\right) c_{n-1} & = & \int_0^1 f\,\phi_i dx \\
 & \vdots & \\
\left(\int_0^1 \phi_{n-1}'\phi_1' dx\right) c_1 + \cdots + \left(\int_0^1 \phi_{n-1}'\phi_{n-1}' dx\right) c_{n-1} & = & \int_0^1 f\,\phi_{n-1} dx
\end{array}$$

La ecuación i del sistema será:

$$\left(\int_0^1 \phi_i'\phi_1' dx\right)\, c_1 + \cdots + \left(\int_0^1 \phi_i'\phi_{n-1}' dx\right)\, c_{n-1} \quad = \quad \int_0^1 f\,\phi_i dx$$

Escrito el sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & \cdots & a(\phi_1,\phi_{n-1}) \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & \cdots & a(\phi_2,\phi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(\phi_{n-1},\phi_1) & a(\phi_{n-1},\phi_2) & \cdots & a(\phi_{n-1},\phi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_1) \\ (f,\phi_2) \\ \vdots \\ (f,\phi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

donde

$$a_{i,j} = a(\phi_i,\phi_j) = \int_\Omega \phi_i'\,\phi_j'\,dx = \int_0^1 \phi_i'\,\phi_j'\,dx$$

$$f_i = (f,\phi_i) = \int_\Omega f\,\phi_i\,dx = \int_0^1 f\,\phi_i\,dx$$

A $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}$ se le llama la **matriz de rigidez** (stiffness matrix) para derivadas de primer orden. Mientras que a $\mathbf{F} = \{f_i\}$ se le llama el **vector de carga**. Armarlas correctamente es vital.

Notas

- Las funciones ϕ_i tienen el valor constante cero fuera del conjunto soporte que es la unión de los elementos $E_i = [x_{i-1}, x_i]$ y $E_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$. Así

$$(f, \phi_i) = \int_\Omega f\,\phi_i\,dx = \int_{E_i} f\,\phi_i\,dx + \int_{E_{i+1}} f\,\phi_i\,dx$$

- Las derivadas de las funciones ϕ_i vale cero fuera de $E_i \cup E_{i+1}$, por tanto, el producto de ϕ_i' con ϕ_j' será cero para posiciones *alejadas* $(i + j > 1)$ y puede ser diferente de cero sólo en:

$$j = i : \qquad \int_\Omega \phi_i'\phi_i'\,dx = \int_{E_i} \phi_i'\phi_i'\,dx + \int_{E_{i+1}} \phi_i'\phi_i'\,dx$$

$$j = i+1 : \qquad \int_\Omega \phi_i'\phi_{i+1}'\,dx = \int_{E_{i+1}} \phi_i'\phi_{i+1}'\,dx$$

Simplificaciones

- Si las funciones ϕ_i son las funciones hat, su derivada se indetermina en x_{i-1}, x_i y x_{i+1} y

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{para } x_{i-1} < x < x_i \\ -\frac{1}{h_{i+1}} = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{para } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{para } x < x_i \text{ ó } x_{i+1} < x \end{cases}$$

- Si los puntos están igualmente espaciados $x_{i+1} - x_i = h$:

$$a(\phi_i, \phi_i) = \int_{E_i} \phi_i' \phi_i' \, dx + \int_{E_{i+1}} \phi_i' \phi_i' \, dx = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$$

$$a(\phi_{i-1}, \phi_i) = \int_{E_i} \phi_{i-1}' \phi_i' \, dx = \int_{x_i - h}^{x_i} \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \, dx = -\frac{1}{h}$$

En este caso el sistema de ecuaciones para las constantes c_i queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ & & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\Omega f\,\phi_1\,dx \\ \int_\Omega f\,\phi_2\,dx \\ \int_\Omega f\,\phi_3\,dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f\,\phi_{n-1}\,dx \end{pmatrix}$$

O bien

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} \int_\Omega f\,\phi_1\,dx \\ \int_\Omega f\,\phi_2\,dx \\ \int_\Omega f\,\phi_3\,dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f\,\phi_{n-1}\,dx \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Suponga que el problema es resolver $-u'' = x^2 - x$ para $0 \le x \le 1$ sujeto a las condiciones $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$. Y que divideremos el intervalo $[0, 1]$ en $n = 4$ partes iguales y que propondremos como solución

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1=3} c_i\, \phi_i(x) \qquad \phi_0(x) = 0 = \phi_4(0)$$

donde para $i = 1, 2, 3$:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = 4(x - x_{i-1}) & \text{para } x_{i-1} \le x < x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = -4(x - x_{i+1}) & \text{para } x_i < x \le x_{i+1} \end{cases}$$

con $x_i = 0 + 0.25\, i \quad$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{E_i} x^2\phi_i\,dx &= \tfrac{1}{12}\,h^3\,(1-4\,i+6\,i^2)\\
\int_{E_{i+1}} x^2\phi_i\,dx &= \tfrac{1}{12}\,h^3\,(1+4\,i+6\,i^2)\\
\int_{E_i} x\phi_i\,dx &= \tfrac{1}{6}\,h^2\,(-1+3\,i)\\
\int_{E_{i+1}} x\phi_i\,dx &= \tfrac{1}{6}\,h^2\,(1+3\,i)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\phi_i\,dx &= \int_{E_i} x^2\phi_i\,dx + \int_{E_{i+1}} x^2\phi_i\,dx = \tfrac{1}{6}\,h^3\,(1+6\,i^2)\\
\int_0^1 x\,\phi_i\,dx &= \int_{E_i} x\,\phi_i\,dx + \int_{E_{i+1}} x\,\phi_i\,dx = h^2\,i
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $n=4$, $h=0.25$ y así:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2-x)\phi_1\,dx &= -0.0442708\\
\int_0^1 (x^2-x)\phi_2\,dx &= -0.0598958\\
\int_0^1 (x^2-x)\phi_3\,dx &= -0.0442708
\end{aligned}$$

El sistema a resolver queda:

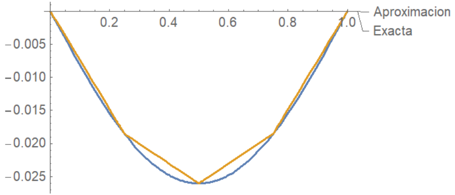
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0.25 \cdot \begin{pmatrix} -0.0442708 \\ -0.0598958 \\ -0.0442708 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$c_1 = -0.0185547, c_2 = -0.0260417, c_3 = -0.0185547$$



Ejercicio

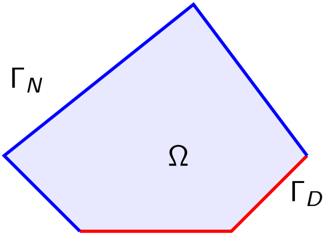
Aplicar FEM para encontrar una aproximación de

$$-u'' = x^2 + x$$

para $0 \leq x \leq 1$ sujeto a las condiciones $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$. Divida $[0, 1]$ en $n = 4$ partes iguales.

Restricciones

Se busca una función incógnita u, escalar, o si se quierer decir $u(x, y)$ definida en una región conectada Ω con fronteras no traslapadas: Γ_D, la frontera de Dirichlet, donde los valores (*displacement*) de la función incógnita son datos, y Γ_N, la frontera de Neumann, donde las derivadas (*normal stresses*) de la función incógnita satisfacen cierta relación.



Los nombres y notación son del área de Ingeniería Civil.

EDP

El problema consiste en determinar $u(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(q\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)+r\,u=f \quad \text{en} \quad \Omega$$

y se cumpla en $\Gamma_D : u = g$ y que en Γ_N se cumpla

$$< p\,\frac{\partial u}{\partial x}, q\,\frac{\partial u}{\partial x} > \bullet \mathbf{n} + g_1\,u = g_2$$

- p, q, r, f son funciones definidas en Ω.
- p y q con primeras derivadas parciales continuas.
- g es una función continua definida en Γ_D.
- g_1, g_2 son funciones definidas en Γ_N.
- g_2 se permite discontinua.
- $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario definido en los puntos de Γ_N apuntando hacia afuera de la región Ω.

Forma Funcional

Si p, q, r y f son continuas en $\bar{\Omega}$ y p y q tienen primeras derivadas parciales continuas y g_1 y g_2 son continuas en Γ_N, y además $p(x,y) > 0$, $q(x,y) > 0$, $r(x,y) \leq 0$ y $f(x,y) > 0$, la solución al nuestro problema $u(x,y)$ minimiza en forma única la funcional:

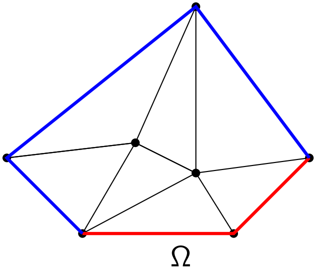
$$\begin{aligned} \mathscr{I}\{w\} &= \int\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left(p\, w_1^2 + q\, w_2^2 - r\, w^2 \right) + f\, w \right)\, dA + \\ & \int_{\Gamma_N} \left(-g_2\, w + \frac{1}{2}\, g_1\, w^2 \right)\, dS \end{aligned}$$

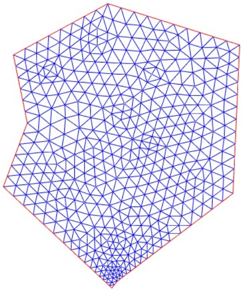
dentro de todas las funciones $w(x,y)$ que satisfacen $w = g$ en Γ_D y que tienen segundas derivadas parciales. Aquí w_1 y w_2 representan las derivadas parciales de w con respecto a la primera y segunda variable, respectivamente.

En la referencia F.J. Sayas se demuestra, mediante el teorema de Green de cálculo vectorial, la conversión de la ED a la forma débil en el caso: $p = 1$, $q = 1$, r constante y $g_1 = 0$.

Los Elementos

Dividir la región en una cantidad finita de secciones o elementos regulares, ya sea triángulos o rectángulos.





Las Funciones

El método de elementos finitos minimiza la funcional $I\{w\}$ sobre una clase de *funciones sencillas*. El conjunto de funciones usadas es el conjunto de polinomios seccionados (que sólo se usan en subregiones) de grado fijo en x y y. Se obliga a los polinomios a coincidir en las fronteras de las subregiones para mantener la continuidad. Para regiones triangulares se usan

$$\phi(x, y) = a + b\,x + c\,y$$

El método busca una aproximación a $u(x, y)$ de la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\, \phi_i(x, y)$$

donde $\phi_i(x, y)$ son polinomios seccionados y γ_i son constantes a determinar.

Sustituyendo en

$$\mathscr{I}\left\{w\right\} = \int\int_{\Omega}\left(\tfrac{1}{2}\left(p\,w_1^2 + q\,w_2^2 - r\,w^2\right) + f\,w\right)\,dA + \int_{\Gamma_N}\left(-g_2\,w + \tfrac{1}{2}\,g_1\,w^2\right)\,dS$$

la aproximación $\phi = \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}\left\{\phi\right\} &= \mathscr{I}\left\{\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right\} \\
&= \int\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\left\{p\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. q\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right)^2 - r\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)^2\right\} + f\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)\,dA + \\
&\quad \int_{\Gamma_n}\left\{-g_2\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i + \frac{1}{2}\,g_1\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)^2\right\}\,dS
\end{aligned}$$

Para que ocurra un mínimo, al considerar a $\mathscr{I}\left\{\phi\right\}$ como función de γ_1, γ_2,... γ_n se requerira que

$$\frac{\partial\mathscr{I}\left\{\phi\right\}}{\partial\gamma_j} = 0 \qquad \text{para}\,\forall j = 1, 2, \ldots, n$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}\left\{\phi\right\} &= \mathscr{I}\left\{\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right\}\\
&= \iint_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\left\{p\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\right)^2+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. q\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right)^2-r\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)^2\right\}+f\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)\,dA+\\
&\qquad\int_{\Gamma_n}\left\{-g_2\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i+\frac{1}{2}\,g_1\,\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right)^2\right\}\,dS
\end{aligned}
$$

Parte de las γ están definidas por las condiciones de frontera, digamos $\gamma_{n+1},\ldots,\gamma_m$, para las restantes $j=1,2,\ldots,n$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial\gamma_j} &= \iint_{\Omega}\left(\left\{p\,\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+q\,\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. r\,\phi_j\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right\}+f\,\phi_j\right)\,dA \quad +\\
&\qquad\int_{\Gamma_n}\left\{-g_2\,\phi_j+g_1\,\phi_j\,\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\phi_i\right\}\,dS=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\left[\iint_{\Omega}\left\{p\,\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\,\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+q\,\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\,\frac{\partial\phi_i}{\partial y}-r\,\phi_j\,\phi_i\right\}\,dA+\right.\\
&\qquad\left.\int_{\Gamma_n}g_1\,\phi_j\,\phi_i\,dS\right]+\iint_{\Omega}f\,\phi_j\,dA-\int_{\Gamma_n}g_2\,\phi_j\,dS
\end{aligned}
$$

Para $j = 1, 2, \ldots, n$ (las últimas γ_j están definidas la frontera g):

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left[\iint_\Omega \left\{ p \, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + q \, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - r \, \phi_j \, \phi_i \right\} dA + \right. \\ & \qquad \left. \int_{\Gamma_n} g_1 \, \phi_j \, \phi_i \, dS \right] + \iint_\Omega f \, \phi_j \, dA - \int_{\Gamma_n} g_2 \, \phi_j \, dS \end{aligned}$$

Coeficiente de γ_i ($i = 1, \ldots, m$) en la ecuación j ($j = 1, 2, \ldots, n$):

$$\alpha_{i,j} = \iint_\Omega \left\{ p \, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + q \, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - r \, \phi_j \, \phi_i \right\} dA + \int_{\Gamma_n} g_1 \, \phi_j \, \phi_i \, dS$$

Lado derecho de la ecuación i ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\beta_i = - \iint_\Omega f \, \phi_i \, dA + \int_{\Gamma_n} g_2 \, \phi_i \, dS - \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{i,k} \, \gamma_k$$

Referencias

- J.N. Reddy: An introduction to the finite element method. New York, NY : McGraw-Hill Higher Education, c2006. **TA347.F5 R4 2006**
- Richard L. Burden, J. Douglas Faires: Numerical analysis. Boston, MA : Brooks/Cole, Cengage Learning, c2011. **QA297 .B84 2011**
- Notas de Clase de Francisco Javier Sayas: A gentle Introduction to FEM: http://www.math.udel.edu/∼fjsayas/classnotes.html