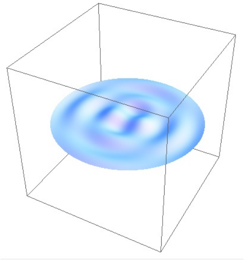
Objetivo
Evolución
Nota
Teoría
La ecuación
Solucion
Entendiendo

Modelación Matemática: Simulación de la membrana vibrante

Departamento de Matemáticas



Objetivo

Dar una introducción muy básica sobre cuáles son los elementos matemáticos que aparecen en la modelación matemática de la membrana vibrante.

La membrana vibrante es un ejemplo clásico que permite experimentación cualitativa y cuantitativa con resultados muy vistosos.

Antes que nada: Evolución Científica

¿Cómo ha evolucionado la experimentación y la modelación a lo largo de la historia?

Ejemplo: Uno de los experimentos más simples: Caída libre

- Recreación del experimento en la torre de Pisa: Aristóteles (384 AC-322 AC) vs Galileo (1564-1642). El astrónomo jesuita italiano Giovanni Battista Riccioli (1598-1671), archienemigo de Galileo (Entendible; Gio era sacerdote y astrónomo), realizó dicho experimento en 1644 (Claro, después que murió Galileo) en la famosa torre Asinelli de Bolonia, Italia comprobando la teoría de Galileo.
- El experimento hecho en la luna por el Apolo 15.
- El experimento ahora (ecuación en el min 2:38)
- Caída libre desde la Estratosfera (desde min 2:40) el día 14 d octubre de 2012 Proyecto de Red Bull. Wikipedia. Video multicámara. Boletín del evento.

Una nota suelta que ni al caso

Tres elementos claves para la realización de proyecto científico:

- Tener una visión/sueño/deseo
- Tener la disciplina para desarollar las habilidades requeridas. Una de ellos la habilidad matemática
- Saber aprovechar los recursos disponibles. Uno de ellos la tecnología.

Teoría

El problema de la membrana vibrante elástica consiste en dar una formulación matemática precisa de la forma como una membrana elástica se mueve en el transcurso del tiempo.

Cuando se dice formulación matemática precisa, significa que se desea encontrar la fórmula bajo la cual se mueve cada punto de la membrana en el tiempo.

El problema, en términos matemáticos, conduce a determinar la función de posición (altura) de un punto del plano arbitrario a lo largo del tiempo. Como no se conoce tal función, se considera una incógnita

$$\boxed{u = u(x, y, t)}$$

La x y la y representan la posición del punto respecto al plano horizontal, y la variable t representa el tiempo; $u(x, y, t)$ será la altura del punto en el instante t respecto al plano de referencia. Está función de posición es una función de tres variables.

Decenas de años y de brillantes científicos llevaron a lo que hoy se conoce como la ecuación de la membrana

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}$$

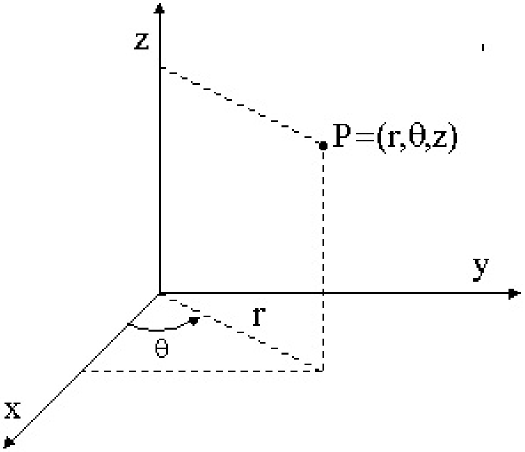
Esta ecuación es una ecuación diferencial parcial: El nombre ecuación diferencial significa que la incógnita es una función y que la función incógnita está "*escondida*" por derivadas. El adjetivo adicional parcial significa que la función incógnita que se desea despejar depende de dos o más variables. Si sólo dependiera de una variable, se dice que la ecuación es una ecuación diferencial <u>ordinaria</u>.

Todos los problemas interesantes en matemáticas son difíciles. Resolver la ecuación de la membrana es uno de ellos. El problema se hace factible, no fácil, de resolver si se hacen varios supuestos. Por ejemplo: si los bordes de la membrana están fijos en el mismo plano y forman un círculo. Justo como en el caso de la membrana de un tambor. Si además se asume simetría radial respecto al eje vertical que está en el centro la ecuación se convierte en:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right)}$$

Suponer simetría radial significa que suponemos que todos los puntos que están a distancia r del centro tienen la misma altura en cualquier momento.

El caso donde no se supone simetría y se cambia a coordenadas polares donde un punto del plano lo especificamos de acuerdo a r su distancia al centro de la membrana y al ángulo θ que forma la parte positiva del eje de referencia x y el vector que une el centro con el punto.



En este caso la solución matemática al problema de la membrana es una suma de soluciones de la forma:

$$\boxed{u_{n,k}(r,\theta,t) = \cos\left(\omega_{n,k}\cdot t\right)\cdot\cos\left(n\cdot\theta\right)\cdot J_n\left(\lambda_{k,n}\cdot r\right)}$$

- Modos de vibración
- You tube
- Simulador

¿Cómo, desde la perspectiva del estudiante de prepa, puedo entender esta solución? Fijemos el ángulo θ para no tener tres variables si no sólo dos: la función queda

$$\boxed{u_{n,k}(r,\theta_o,t) = \cos\left(n\cdot\theta_o\right)\cdot\cos\left(\omega_{n,k}\cdot t\right)\cdot J_n\left(\lambda_{k,n}\cdot r\right)}$$

Lo que nos interesa entender ahora es el significado de

$$u_{theta_o}(r,t) = \cos\left(\omega_{n,k}\cdot t\right)\cdot J_n\left(\lambda_{k,n}\cdot r\right)$$

La función $J_n(\lambda_{k,n}\cdot r)$ es una función muy especial en física y matemáticas y se conoce como la función de Bessel de primera clase.

Cómo entender

$$u_{theta_o}(r,t) = \cos\left(\omega_{n,k} \cdot t\right) \cdot J_n\left(\lambda_{k,n} \cdot r\right)$$

Pensando que el tiempo es una dimensión adicional a la dimensión r.