Optimización Multiobjetivo; una introducción

E. Uresti

Introducción

Se puede decir que la *verdadera optimización* es optimización multiobjetivo: los problemas *reales* en general involucran más de un objetivo a la vez. Considere por ejemplo el problema de diseñar un dispositivo electrónico. Por un lado deseamos maximizar el desempeño, por otro lado se desea minimizar el costo de manufacturarlo. También uno puede pensar en buscar un diseño donde se minimice el tiempo medio entre fallas.

Definición

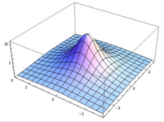
Dado que un problema de maximización puede ser convertido fácilmente en uno de minimización, podemos dar la siguiente definición:

> *Dado un conjunto de variables* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *de cierta naturaleza tales que deben complir un conjunto de restricciones que se formulan mediante la pertenencia a un conjunto* $\mathscr{D}$ *y dadas funciones* f_1, $f_2, \ldots, f_n$ *definidas sobre* $\mathscr{D}$ *y de valor real, el problema multiobjetivo asociado a* $\mathscr{D}$ *y a* $\mathbf{f}$ *se define como el problema de minimizar* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$*:*

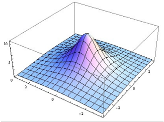
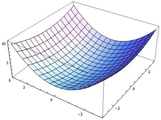
$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Representación

Optimización Clásica: Optimizar

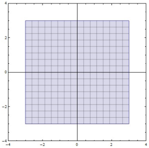
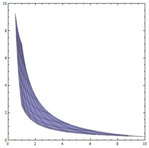


Optimización Multiobjetivo: Optimizar simultáneamente:

Representación alterna:

Espacio búsqueda   Espacio de Evaluaciones

Dominancia

Diremos que el punto $\mathbf{x} \in \mathscr{D}$ domina de acuerdo a $\mathbf{f}$ al punto $\mathbf{y} \in \mathscr{D}$, si ocurre lo siguiente:

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, f_j(\mathbf{x}) \leq f_j(\mathbf{y})$$
y
$$\exists j_o \in \{1, \ldots, m\}, f_{j_o}(\mathbf{x}) < f_{j_o}(\mathbf{y})$$

esto lo simbolizaremos como:

$$\mathbf{x} \prec_{\mathbf{f}} \mathbf{y}$$

Orden total vs Conjunto con orden parcial

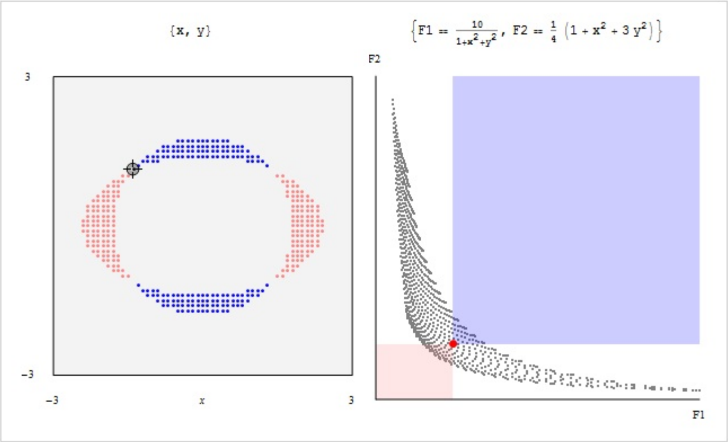
¿Qué se busca en un problema multiobjetivo?

Se busca el frente de Pareto, o conjunto de puntos del espacio de búsqueda que no son dominados:

$$\mathscr{P}_{\mathscr{D},\mathbf{f}} = \{\mathbf{x} \in \mathscr{D} \,|\, \nexists \mathbf{y} \in \mathscr{D}, \mathbf{y} \prec_{\mathbf{f}} \mathbf{x}\}$$

¿Pareto?

Ejemplo



Ejemplo 1; Ejemplo 2, vista local; Ejemplo 3, vista global; Ejemplo 3, vista local; Ejemplo 4, vista local;

¿A qué se aspira en términos reales?

A encontrar ...

- un punto en el frente de Pareto.
- un conjunto de puntos en el frente de Pareto.
- un punto cercano al frente de Pareto y en $\mathscr{D}$.
- un conjunto de puntos cercano al frente de Pareto y en $\mathscr{D}$.
- un conjunto de puntos cercano al frente de Pareto, que estén $\mathscr{D}$ y que estén adecuadamente distribuidos.

Si interesa un conjunto de puntos, parece ser adecuado utilizar una estrategia que se base en muestrear $\mathscr{D}$ mediante un conjunto de puntos. Aquí aparencen las estrategias evolutivas.

Método de los coeficientes de peso

Suponga que se desea minimizar $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

el método consiste en escoger coeficientes no negativos α_i y minimizar la función de valor real

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} f_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 \cdot f_2(\mathbf{x}) + \cdots + \alpha_n \cdot f_n(\mathbf{x})$$

Es decir, se define una *relación de valor* entre los objetivos (piense por ejemplo en que si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0.5$ el *costo* del primer objetivo es el doble del costo en el segundo).

El método de los coeficientes de peso ...

- Transforma el problema multiobjetivo en un problema de optimización tradicional. Es decir, por un lado pierde su esencia y por otro lado se simplifica (se vuelve soluble por los métodos tradicionales).
- Entrega un sólo punto; y no un conjunto de puntos como esperamos.
- No hay garantía de que el punto esté en el frente.
- Se vuelve un método *sensible* a la selección de los coeficientes de peso; el problema debe ser muy conocido por el usuario para dar una selección de valores que lleve a una solución razonable.

Método de las restricciones

Suponga que para $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ se desea:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

el método consiste en escoger una componente de $\mathbf{f}$, f_{i_o}, a optimizar y escoger valores especificos para los objetivos restantes v_i y posteriormente minimizar la función

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{S}} f_{i_o}(\mathbf{x})$$

donde

$$\mathscr{S} = \mathscr{D} \cap \left(\bigcap_{i \neq i_o} f_i(\mathbf{x}) \leq v_i \right)$$

Es decir, se desea minimizar el objetivo i_o no empeorando cada uno de los objetivos restantes más allá de los valores correspondientes v_i.

El método de las restricciones ...

- Transforma el problema multiobjetivo en un problema de optimización tradicional.
- Entrega un sólo punto que está en el frente de pareto.
- Requiere una exploración del espacio de soluciones de manera que los valores propuestos v_i no conduzcan a un conjunto $\mathscr{S}$ vacío.

Programación por metas

Suponga que para $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ se desea:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

el método consiste establecer una meta en el espacio de búsqueda $\mathbf{f}_o = (f_1^o, f_2^o, \ldots, f_n^o)$, y definir variables que midan la diferencia de la evaluación de un punto cualquiera al punto meta. Se definen dos variables por cada objetivo: una para medir si excede d_i^p y otra para medir si está por abajo d_i^n; el problema consiste en minimiza la discrepacia total a la meta

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathscr{S}} \sum_{i=1}^{m} \left(d_i^p + d_i^n \right)$$

$$\mathscr{S} = \mathscr{D} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \left(f_i(\mathbf{x}) - f_i^0 = d_i^p - d_i^n \right) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \left(d_i^p \geq 0 \cap d_i^n \geq 0 \right) \right)$$

El método de la programación por metas . . .

- Transforma el problema multiobjetivo en un problema de optimización tradicional. Si el problema original es un PL el nuevo problema transformado también lo es
- Entrega un sólo punto que está en el frente de pareto, si la meta elegida no está en el rango de las evaluaciones; Requiere una exploración del espacio de soluciones.
- Establece una relación de igual valor entre los objetivos al equiparar una distancia entre ellos.