# Álgebra Lineal
# Ma1010

## Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Departamento de Matemáticas

ITESM

# Introducción

En esta lectura veremos algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Las aplicaciones de la resoluciones de sistemas son innumerables, y por consiguiente es imposible pretender cubrir las aplicaciones. Queda como reto personal encontrar situaciones donde surgan este tipo de problemas.

# Objetivo

La lectura pretende que usted conozca algunas de las situaciones que conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Notablemente, la técnica de las fracciones parciales, el ajuste de curvas y algunos más.

Una técnica muy conveniente utilizada en algunas tareas matemáticas es aquella conocida como fracciones parciales. Ésta se aplica para simplificar integrales o transformadas de Laplace, por citar algunos ejemplos. La idea principal consiste en cambiar la forma que puede ser expresado un cociente entre polinomios a otra forma más conveniente para cierto tipo de cálculo.

## Ejemplo

Determine los valores de las constantes $a$ y $b$ para que satisfagan:

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

**Solución**

Se debe cumplir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x+3)} &= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} \\
&= \frac{a\,(x+3)+b\,(x-2)}{(x-2)\,(x+3)} \\
&= \frac{a\,x + 3\,a + b\,x - 2\,b}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{(3\,a-2\,b) + (a+b)\,x}{(x-2)(x+3)}
\end{aligned}
$$

Esto se cumple si:

Esto se cumple si:

$$1 + 0 * x = 1 = (3\,a - 2\,b) + (a + b)\,x$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{rcrcl} 3\,a & - & 2\,b & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array}$$

El cual tiene como solución:

$$a = \frac{1}{5} \text{ y } b = -\frac{1}{5}$$

**Ejemplo**

(Forma dudosa) Determine los valores de las constantes $a$ y $b$ para que satisfagan:

$$\frac{2+2x+2x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+1}$$

**Solución**

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\frac{2+2x+2x^2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+1} \\
&= \frac{a\,(x^2+1)+b\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2+1)} \\
&= \frac{a\,x^2+a+b\,x+b}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(a+b)+(b)\,x+a\,x^2}{(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Esto se cumple si:

$$2 + 2x + 2x^2 = (a + b) \; + \; (b)\, x + a\, x^2$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ & + & b & = & 2 \\ a & & & = & 2 \end{array}$$

Esto se cumple si:

$$2 + 2x + 2x^2 = (a + b) \; + \; (b)\, x + a\, x^2$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ & + & b & = & 2 \\ a & & & = & 2 \end{array}$$

El cual no tiene solución.

Esto se cumple si:

$$2+2x+2x^2=(a+b)\;+\;(b)\,x+a\,x^2$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ & + & b & = & 2 \\ a & & & = & 2 \end{array}$$

El cual no tiene solución. ¿Qué puede andar mal?

Esto se cumple si:

$$2 + 2x + 2x^2 = (a + b) + (b)\,x + a\,x^2$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ & + & b & = & 2 \\ a & & & = & 2 \end{array}$$

El cual no tiene solución. ¿Qué puede andar mal? La forma propuesta para la expresión en fracciones parciales.

**Ejemplo**

Determine los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ para que satisfagan:

$$\frac{2+2x+2x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b\,x+c}{x^2+1}$$

## Solución

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1} \\
&= \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{ax^2+a+bx^2+bx+cx+c}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+(a+c)}{(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Esto se cumple si:

$$2x^2 + 2x + 2 = (a+b)x^2 + (b+c)x + (a+c)$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & 2 \\ & & b & + & c & = & 2 \\ a & & & + & c & = & 2 \end{array}$$

Esto se cumple si:

$$2x^2 + 2x + 2 = (a+b)x^2 + (b+c)x + (a+c)$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & 2 \\ & & b & + & c & = & 2 \\ a & & & + & c & = & 2 \end{array}$$

El cual tiene como solución:

$$a = 1,\ b = 1 \text{ y } c = 1$$

Un problema comun en diferentes áreas es la determinación de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos.

# Determinación de curvas

Un problema comun en diferentes áreas es la determinación de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos. Usualmente se conoce la naturaleza de la función, es decir, se conoce la forma que debe tener la función.

# Determinación de curvas

Un problema comun en diferentes áreas es la determinación de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos. Usualmente se conoce la naturaleza de la función, es decir, se conoce la forma que debe tener la función. Por ejemplo, línea recta, parábola o exponencial etc.

# Determinación de curvas

Un problema comun en diferentes áreas es la determinación de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos. Usualmente se conoce la naturaleza de la función, es decir, se conoce la forma que debe tener la función. Por ejemplo, línea recta, parábola o exponencial etc. Lo que se hace para resolver este tipo de problemas es describir la forma más general de la función mediante parámetros constantes.

# Determinación de curvas

Un problema comun en diferentes áreas es la determinación de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos. Usualmente se conoce la naturaleza de la función, es decir, se conoce la forma que debe tener la función. Por ejemplo, línea recta, parábola o exponencial etc. Lo que se hace para resolver este tipo de problemas es describir la forma más general de la función mediante parámetros constantes. Y posteriormente se determinan estos parámetros *haciendo pasar* la función por los puntos conocidos.

**Ejemplo**

Determine la función cudrática que pasa por los puntos $P(1,4)$, $Q(-1,2)$, y $R(2,3)$.

**Ejemplo**

Determine la función cudrática que pasa por los puntos $P(1,4)$, $Q(-1,2)$, y $R(2,3)$.

**Solución**

La forma más general de una cuadrática es:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donde los coeficientes $a$, $b$, y $c$ son constantes numéricas. El problema consiste en determinar estos coeficientes.

**Ejemplo**

Determine la función cudrática que pasa por los puntos $P(1,4)$, $Q(-1,2)$, y $R(2,3)$.

**Solución**

La forma más general de una cuadrática es:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donde los coeficientes $a$, $b$, y $c$ son constantes numéricas. El problema consiste en determinar estos coeficientes. Así pues los parámetros $a$, $b$, y $c$ se vuelven ahora las incógnitas. Y para poderlas determinar requerimos de ecuaciones o igualdades que deben satisfacer.

Para determinar estas ecuaciones debemos usar los puntos. Para que la función pase por el punto $P(1,4)$ se debe cumplir que

$$f(x=1)=4$$

Para determinar estas ecuaciones debemos usar los puntos. Para que la función pase por el punto $P(1,4)$ se debe cumplir que

$$f(x=1)=4$$

es decir, se debe cumplir:

$$a\,(1)^2+b\,(1)+c=4$$

Para determinar estas ecuaciones debemos usar los puntos. Para que la función pase por el punto $P(1,4)$ se debe cumplir que

$$f(x=1)=4$$

es decir, se debe cumplir:

$$a\,(1)^2+b\,(1)+c=4$$

es decir, se debe cumplir:

$$a+b+c=4$$

Procediendo de igual manera con el punto $Q(-1,2)$: formulamos la ecuación:

$$a - b + c = 2$$

y para $R(2,3)$:

$$4a + 2b + c = 3$$

Resumiendo para que la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ pase por los puntos $P$, $Q$, y $R$ deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 4 \\ a & - & b & + & c & = & 2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 3 \end{array}$$

Resumiendo para que la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ pase por los puntos $P$, $Q$, y $R$ deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrl} a & + & b & + & c & = 4 \\ a & - & b & + & c & = 2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = 3 \end{array}$$

La solución a este sistema es:

$$a = -\frac{2}{3}, b = 1, \text{ y } c = \frac{11}{3}$$

La misma situación presentada en el problema de las fracciones parciales que originaba un sistema inconsistente, se puede presentar en la determinación de funciones. Y la conclusión es similar: si el sistema originado es inconsistente lo que se concluye es que no existe una función con esa forma general que pase exactamente por los puntos dados.

**Ejemplo**

Conociendo la solución general a una ED:

$$y(t) = C_1\, e^{t} + C_2\, e^{-t} + C_3\, e^{3\,t}$$

Determine en orden los valores de las constantes $C_1$, $C_2$, y $C_3$ para que se cumpla:

$$y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = -2$$

**Ejemplo**

Conociendo la solución general a una ED:

$$y(t) = C_1\,e^{t} + C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{3\,t}$$

Determine en orden los valores de las constantes $C_1$, $C_2$, y $C_3$ para que se cumpla:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -2$$

**Solución**

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & C_1\,e^{t} + C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{3\,t} \\ y'(t) & = & C_1\,e^{t} - C_2\,e^{-t} + 3\,C_3\,e^{3\,t} \\ y''(t) & = & C_1\,e^{t} + C_2\,e^{-t} + 9\,C_3\,e^{3\,t} \end{array}$$

Usando las condiciones iniciales y las derivadas calculadas tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & C_1 + C_2 + C_3 \\ -1 & = & C_1 - C_2 + 3\,C_3 \\ -2 & = & C_1 + C_2 + 9\,C_3 \end{array}$$

Usando las condiciones iniciales y las derivadas calculadas tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 + C_3 \\ -1 &= C_1 - C_2 + 3\,C_3 \\ -2 &= C_1 + C_2 + 9\,C_3 \end{aligned}$$

La solución es: $C_1 = 0$, $C_2 = 1/4$ y $C_3 = -1/4$.

# Balanceo de Reacciones Químicas

Una aplicación sencilla de los sistemas de ecuaciones se da en el balanceo de reacciones químicas.

# Balanceo de Reacciones Químicas

Una aplicación sencilla de los sistemas de ecuaciones se da en el balanceo de reacciones químicas. La problemática consiste en determinar el número entero de moléculas que intervienen en una reacción química cuidando siempre que el número de átomos de cada sustancia se preserve.

**Ejemplo**

Balancee la reacción química

$$a\,\mathbf{CH}_4 + b\,\mathbf{O}_2 \rightarrow c\,\mathbf{CO}_2 + d\,\mathbf{H}_2\mathbf{O}$$

**Ejemplo**

Balancee la reacción química

$$a\,\mathbf{CH_4} + b\,\mathbf{O_2} \to c\,\mathbf{CO_2} + d\,\mathbf{H_2O}$$

**Solución**

Para determinar los coeficientes $a$, $b$, $c$, y $d$ que representan el número de moléculas de las sustancias en la reacción debemos igualar el número de átomos en cada miembro:

**Por los átomos de carbono**

$$a = c$$

**Por los átomos de oxígeno**

$$2\,b = 2\,c + d$$

**Por los átomos de hidrógeno**

$$4\,a = 2\,d$$

Este sistema es consistente y origina infinitas soluciones. La fórmula general para las soluciones queda:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\,d \\ b &= d \\ c &= \tfrac{1}{2}\,d \end{aligned}$$

Este sistema es consistente y origina infinitas soluciones. La fórmula general para las soluciones queda:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\,d \\ b &= d \\ c &= \tfrac{1}{2}\,d \end{aligned}$$

El valor más pequeño de $d$ que hace que los números de moléculas sean enteros positivos es $d = 2$:

$$a = 1, b = 2, c = 1, \text{ y } d = 2$$

**Ejemplo**

**Patito computers** fabrica tres modelos de computadoras personales: *cañon*, *clon*, y *lenta-pero-segura*. Para armar una computadora modelo *cañon* necesita 12 horas de ensamblado, 2.5 para probarla, y 2 más para instalar sus programas. Para una *clon* requiere 10 horas de ensamblado, 2 para probarla, y 2 para instalar programas. Y por último, para una *lenta-pero-segura* requiere 6 para ensamblado, 1.5 para probarla, y 1.5 para instalar programas. Si la fábrica dispone en horas por mes de 556 para ensamble, 120 para pruebas, y 103 horas para instalación de programas, ¿cuántas computadoras se pueden producir por mes?

**Solución**

En nuestro caso las incógnitas el número de cada tipo de computadora a producir:

$$\begin{aligned} x &= \text{número de computadoras } \textit{cañon} \\ y &= \text{número de computadoras } \textit{clon} \\ z &= \text{número de computadoras } \textit{lenta-pero-segura} \end{aligned}$$

**Solución**

En nuestro caso las incógnitas el número de cada tipo de computadora a producir:

$$\begin{aligned} x &= \text{número de computadoras } \textit{cañon} \\ y &= \text{número de computadoras } \textit{clon} \\ z &= \text{número de computadoras } \textit{lenta-pero-segura} \end{aligned}$$

Para determinar las ecuaciones debemos utilizar los tiempos de ensamblado, pruebas, e instalación de programas.

## Ensamblado

$$556(\text{total}) = 12\,x(\textit{cañon}) + 10\,y(\textit{clon}) + 6\,z(\textit{lenta})$$

**Ensamblado**

$$556(\text{total}) = 12\,x(\textit{cañon}) + 10\,y(\textit{clon}) + 6\,z(\textit{lenta})$$

**Pruebas**

$$120(\text{total}) = 2.5\,x(\textit{cañon}) + 2\,y(\textit{clon}) + 1.5\,z(\textit{lenta})$$

**Ensamblado**

$$556(\text{total}) = 12\,x(\textit{cañon}) + 10\,y(\textit{clon}) + 6\,z(\textit{lenta})$$

**Pruebas**

$$120(\text{total}) = 2.5\,x(\textit{cañon}) + 2\,y(\textit{clon}) + 1.5\,z(\textit{lenta})$$

**Instalación de programas**

$$103(\text{total}) = 2\,x(\textit{cañon}) + 2\,y(\textit{clon}) + 1.5\,z(\textit{lenta})$$

Al resolver este sistema obtenemos:

$$x = 34, y = 4, z = 18$$

Dado lo común de las aplicaciones hacia el área de manufactura, existe una forma simple de construir la matriz del sistema de ecuaciones que en general se trabaja como una tabla:

- En la última columna aparecen los recursos: un renglón para cada tipo de recursos y en cuya posición final se pone el total de recursos disponibles.
- En las primera columnas se colocan los objetos o modelos a ser ensamblados o construidos: en cada posición se coloca el total de recursos que consume en forma unitaria cada tipo de objeto.

| | Recursos requeridos por unidad | | | |
|---|---|---|---|---|
| Recurso | Cañon | Clon | Lenta | Total |
| Ensamble | 12 | 10 | 6 | 556 |
| Pruebas | 2.5 | 2 | 1.5 | 120 |
| Instalación | 2 | 2 | 1.5 | 103 |

**Ejemplo**

Un negociante internacional necesita, en promedio, cantidades fijas de yenes japoneses, francos franceses, y marcos alemanes para cada uno de sus viajes de negocios. Este año viajó tres veces. La primera vez cambió un total de \$434 a la siguiente paridad: 100 yenes, 1.5 francos y 1.2 marcos por dolar. La segunda vez, cambió un total de \$406 con las siguientes tasas: 100 yenes, 1.2 francos, y 1.5 marcos por dolar. La tercera vez cambió \$434 en total, a \$125 yenes, 1.2 francos, y 1.2 marcos por dolar. ¿Qué cantidades de yenes, francos y marcos compró cada vez?

**Solución**

En nuestro caso las incógnitas son las cantidades de moneda extranjera requerida que se mantuvo fija en los tres viajes:

**Solución**

En nuestro caso las incógnitas son las cantidades de moneda extranjera requerida que se mantuvo fija en los tres viajes:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad de yenes} \\ y &= \text{cantidad de francos} \\ z &= \text{cantidad de marcos} \end{aligned}$$

Primera vez:

$$434(\text{total}) = \frac{1}{100}\,x + \frac{1}{1.5}\,y + \frac{1}{1.2}\,z$$

Primera vez:

$$434(\textsf{total}) = \frac{1}{100}\,x + \frac{1}{1.5}\,y + \frac{1}{1.2}\,z$$

Segunda vez:

$$406(\textsf{total}) = \frac{1}{100}\,x + \frac{1}{1.2}\,y + \frac{1}{1.5}\,z$$

Primera vez:

$$434(\text{total}) = \frac{1}{100}x + \frac{1}{1.5}y + \frac{1}{1.2}z$$

Segunda vez:

$$406(\text{total}) = \frac{1}{100}x + \frac{1}{1.2}y + \frac{1}{1.5}z$$

Tercera vez:

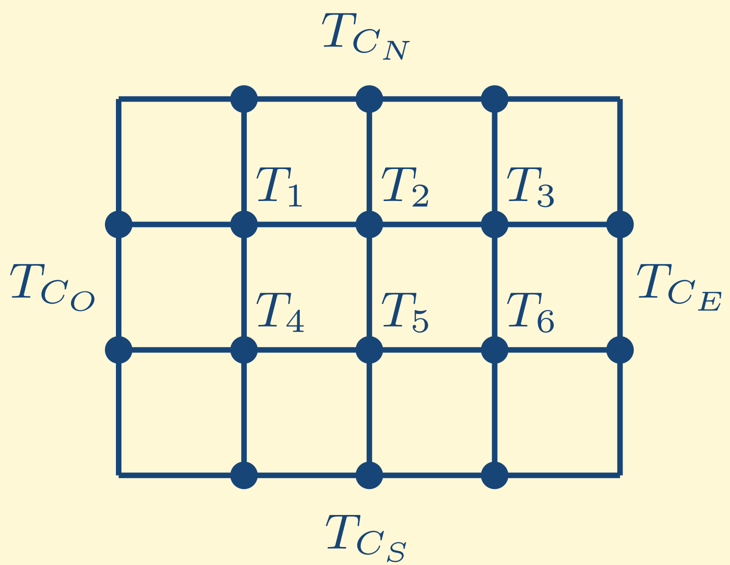
$$434(\text{total}) = \frac{1}{125}x + \frac{1}{1.2}y + \frac{1}{1.2}z$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos:

$$x = 10500, y = 126, z = 294$$

**Ejemplo**

Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección transversal perpendicular a la placa.




Sean $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, $T_5$, y $T_6$ las tempreaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha, y a la izquierda.

Así por ejemplo

$$T_1 = (T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O})\,/4.$$

Determine las temperaturas $T_1$ a $T_6$ sabiendo que

$$T_{C_N} = 25^o,\, T_{C_E} = 37^o,\, T_{C_S} = 10^o,\, T_{C_O} = 31^o$$

Reporte sólo el valor de $T_2$.

**Solución**

Las ecuaciones para las temperaturas de los puntos interiores a la placa $T_1$ a $T_6$ quedan:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O})/4\\
T_2 &= (T_{C_N} + T_3 + T_5 + T_1)/4\\
T_3 &= (T_{C_N} + T_{C_E} + T_6 + T_2)/4\\
T_4 &= (T_1 + T_5 + T_{C_S} + T_{C_O})/4\\
T_5 &= (T_2 + T_6 + T_{C_S} + T_4)/4\\
T_6 &= (T_3 + T_{C_E} + T_{C_S} + T_5)/4
\end{aligned}$$

Usando los datos de las temperaturas a los costados de la placa y convirtiendo cada ecuación a la forma canónica queda (conviene multiplicar por 4 cada ecuación):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
4T_1 & - & T_2 & & & - & T_4 & & & & & = & 56 \\
-T_1 & + & 4T_2 & - & T_3 & & & - & T_5 & & & = & 25 \\
 & - & T_2 & + & 4T_3 & & & & & - & T_6 & = & 62 \\
-T_1 & & & & & + & 4T_4 & - & T_5 & & & = & 41 \\
 & - & T_2 & & & - & T_4 & + & 4T_5 & - & T_6 & = & 10 \\
 & & & - & T_3 & & & - & T_5 & + & 4T_6 & = & 47
\end{array}$$

Quedando

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & \\
\hline
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 56 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 25 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 62 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 41 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 10 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 47
\end{array}\right]$$

Al reducir la matriz obtenemos la solución:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 25.527 \\
T_2 &= 24.496 \\
T_3 &= 27.527 \\
T_4 &= 21.614 \\
T_5 &= 19.931 \\
T_6 &= 23.614
\end{aligned}
$$

**Ejemplo**

Determine los coeficientes que deben tener los polinomios

$$S_1(x) = A_1 + B_1\,(x-0.4) + C_1\,(x-0.4)^2 + D_1\,(x-0.4)^3$$

$$S_2(x) = A_2 + B_2\,(x-0.5) + C_2\,(x-0.5)^2 + D_2\,(x-0.5)^3$$

para que se cumpla:

$$\begin{array}{lcllcl}
1.-\ S_1(0.4) & = & 0.528571 & 2.-\ S_1(0.5) & = & 0.895926\\
3.-\ S_2(0.5) & = & 0.895926 & 4.-\ S_2(0.6) & = & 0.356182\\
5.-\ S_1'(0.5) & = & S_2'(0.5) & 6.-\ S_1''(0.5) & = & S_2''(0.5)\\
7.-\ S_1''(0.4) & = & 0 & 8.-\ S_2''(0.6) & = & 0
\end{array}$$

Lo que debe hacer es tomar como incógnitas dichos coeficientes, usar las condiciones anteriores para construir ecuaciones, y resolver el sistema que se forma.

La condición 1. lleva a la ecuación $A_1 = 0.528571$

La condición 2. lleva a la ecuación $A_1 + .1\,B_1 + .01\,C_1 + .001\,D_1 = .895926$

La condición 3. lleva a la ecuación $A_2 = .895926$

La condición 4. lleva a la ecuación $A_2 + .1\,B_2 + .01\,C_2 + .001\,D_2 = .356182$

La condición 5. lleva a la ecuación $B_1 + .2\,C_1 + .03\,D_1 = B_2$

La condición 6. lleva a la ecuación $2\,C_1 + .6\,D_1 = 2\,C_2$

La condición 7. lleva a la ecuación $2\,C_1 = 0$

La condición 8. lleva a la ecuación $2\,C_2 + .6\,D_2 = 0$.

Al resolver este sistema de 8 ecuaciones con 8 incógintas daa la solución:

$$\begin{array}{llll} A_1 = .52857100 & B_1 = 5.9412975 & C_1 = 0.0 & D_1 = -226.77475 \\ A_2 = 0.89592600 & B_2 = -.86194500 & C_2 = -68.032425 & D_2 = 226.77475 \end{array}$$

# Suma de los primeros cuadrados

**Ejemplo**

Existe una fórmula para calcular la suma

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2.$$

Sabiendo que la fórmula es un polinomio de grado tres en la variable $n$, encuentre dicha fórmula. **Sugerencia**: Proponga como fórmula

$$F(n) = A\,n^3 + B\,n^2 + C\,n + D$$

donde $A, B, C$ y $D$ son incógnitas. Dando los valores $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ y conociendo los resultados que dan esas sumas, plantea y resuelve el sistema.

**Solución**

Para $n = 1$ la suma da:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

Por tanto, la fórmula para $n = 1$ debe dar 1. La ecuación queda:

$$A\,1^3 + B\,1^2 + C\,1 + D = A + B + C + D = 1$$

Para $n = 2$ la suma da:

$$\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Por tanto, la fórmula para $n = 2$ debe dar 5. La ecuación queda:

$$A\,2^3 + B\,2^2 + C\,2 + D = 8\,A + 4\,B + 2\,C + D = 5$$

Para $n = 3$ la suma da:

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Por tanto, la fórmula para $n = 3$ debe dar 14. La ecuación queda:

$$A\,3^3 + B\,3^2 + C\,3 + D = 27\,A + 9\,B + 3\,C + D = 27$$

Para $n = 4$ la suma da:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Por tanto, la fórmula para $n = 3$ debe dar 14. La ecuación queda:

$$A\,4^3 + B\,4^2 + C\,4 + D = 64\,A + 16\,B + 4\,C + D = 30$$

Al resolver este sistema de 4 ecuaciones para $A$, $B$, $C$ y $D$ obtenemos:

$$A = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{6}$$

Por tanto la fórmula de la sumatoria queda:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n$$

**Ejemplo**

La integral de una función en un intervalo se puede aproximar dividiendo el intervalo en un número de puntos adecuado ($2\,n+1$) y en cada 3 puntos consecutivos cambiar la función a integrar por la parábola (polinomio cuadrático) que pasa ellos. Utilice esta técnica para calcular la integral

$$\int_{1.}^{1.8} f(x)\,dx$$

Utilizando los datos:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 1.37772 |
| 2 | 1.2 | 1.28014 |
| 3 | 1.4 | 1.36167 |
| 4 | 1.6 | 2.69787 |
| 5 | 1.8 | 2.55062 |

**Solución**

Primero calculemos la parábola que pasa por los 3 primeros puntos. La parábola será $f_1(x) = a_1\,x^2 + b_1\,x + c_1$. Al aplicar las condiciones de que pase por esos puntos quedan las ecuaciones

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Para}\,(1.0, 1.37772) & 1.00\,a_1 + 1.0\,b_1 + c_1 & = & 1.37772 \\
\text{Para}\,(1.2, 1.28014) & 1.44\,a_1 + 1.2\,b_1 + c_1 & = & 1.28014 \\
\text{Para}\,(1.4, 1.36167) & 1.96\,a_1 + 1.4\,b_1 + c_1 & = & 1.36167
\end{array}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a_1 = 2.238875, b_1 = -5.413425, c_1 = 4.552270$$

Por tanto,

$$\int_{1.0}^{1.4} f(x)\,dx \approx \int_{1.0}^{1.6} f_1(x)\,dx = 0.5239966667$$

Por otro lado, para últimos 3 puntos la parábola será $f_2(x) = a_2\,x^2 + b_2\,x + c_2$. Al aplicar las condiciones de que pase por esos puntos quedan las ecuaciones

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Para } (1.4, 1.36167) & 1.96\,a_2 + 1.4\,b_2 + c_2 & = & 1.36167 \\
\text{Para } (1.6, 2.69787) & 2.56\,a_2 + 1.6\,b_2 + c_2 & = & 2.69787 \\
\text{Para } (1.8, 2.55062) & 3.24\,a_2 + 1.8\,b_2 + c_2 & = & 2.55062
\end{array}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a_2 = -18.543125, b_2 = 62.310375, c_2 = -49.528330$$

Por tanto,

$$\int_{1.4}^{1.8} f(x)\,dx \approx \int_{1.4}^{1.8} f_2(x)\,dx = 0.9802513333$$

Así

$$\int_{1.0}^{1.8} f(x)\,dx = \int_{1.0}^{1.4} f(x)\,dx + \int_{1.4}^{1.8} f(x)\,dx \approx 1.504248$$