Dependencia e Independencia Lineal en $\mathbf{R}^n$

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

12 de enero de 2011

Índice

8.1. Objetivos

Después del concepto de espacio generado, el siguiente concepto en importancia es el de dependencia lineal. Este concepto será introducido en esta lectura. Los principales apartados son:

- El concepto de conjunto de vectores linealmente dependiente.
- El proceso para verificar cuando un conjunto de vectores es linealmente dependiente.
- La relación entre independencia lineal y sistemas de ecuaciones lineales.

La meta final es analizar las razones por las que un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Nuestra conclusión será que se debe a que las columnas de la matriz de coeficientes forman un conjunto de vectores linealmente dependiente. Si fuera conjunto independiente, la solución sería única en caso de haber solución.

8.2. Motivación

La motivación de este concepto surge del análisis de un sistema de ecuaciones lineales. Considere el sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Supongamos que el sistema sea consistente y que $\mathbf{x}_0$ sea una solución al mismo. Es decir,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

Supongamos también que $\mathbf{x}_1$ sea otra solución al sistema, entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$$

Si restamos las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Factorizando el lado izquierdo tenemos:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\right) = \mathbf{0}$$

Es decir, que el vector $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$ es una solución a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

el cual se conoce como *sistema homogéneo asociado* al sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para el sistema homogéno asociado, por ser homogéneo, podemos decir que siempre es consistente: todas las variables igualadas a cero es una solución. Esta solución se conoce como la *solución trivial*. Si el sistema homogéneo asociado sólo tiene la solución $\mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, y por tanto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$. Es decir, si el sistema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial, entonces el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única. Por otro lado, si el sistema homogéneo $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene otra solución diferente de $\mathbf{0}$, digamos $\mathbf{x}_h$, entonces:

$$\mathbf{A}\,\left(\mathbf{x}_o + \mathbf{x}_h\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}_o + \mathbf{A}\mathbf{x}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Es decir, si $\mathbf{x}_h$ es una solución diferente de $\mathbf{0}$ al sistema homogéneo, entonces $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$ es una solución a $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ diferente de $\mathbf{x}_o$. Es decir, que si $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones entonces el sistema consistente $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ también tendrá infinitas soluciones.

8.3. Relación entre el sistema y su sistema homogéneo asociado

Esto se puede resumir en el siguiente resultado que dice que la unicidad de la solución en un sistema consistente queda determinada por la unicidad del sistema homogéneo:

Teorema

Suponga el sistema consistente:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Entonces: el sistema tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo asociado tiene solución única. Equivalentemente: el sistema no tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo asociado tiene otra solución diferente de la solución trivial.

8.4. Idea Clave

De acuerdo con este resultado, la clave para saber si un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones está en el análisis del sistema homogéneo asociado , y esto hace que nos interesemos en saber si los sistemas homogéneos tienen otra solución además de la solución trivial.
Si $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ y $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ entonces el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se convierte en el sistema:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Por consiguiente, la pregunta: ¿el sistema homogéneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene otra solución **además de la solución trivial?** se convierte en: ¿hay forma de *combinar linealmente* los vectores $\mathbf{a}_i$ para que den el vector $\mathbf{0}$ donde **no todos los coeficientes sean cero?**

8.5. Dependencia lineal

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición

Un conjunto de vectores en $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_k$, es *linealmente dependiente* si existen constantes c_1, $c_2, \ldots, c_k$ **no todos ceros** tales que:

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\,\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice *linealmente independiente* : es decir, cuando la única combinación lineal de los vectores que da el vector cero es la que tienen todos sus coeficientes cero.

Ejemplo 8.1

Indique si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente:

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Debemos ver cómo deben ser las constantes c_1, c_2 y c_3 para que:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

El sistema anterior tiene matriz aumentada que al reducirla queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como el sistema tiene solución única $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$ se deduce que la única forma de combinar los vectores $\mathbf{x}$'s para que den el vector cero es la que tiene todos los coeficientes cero. Por tanto, el conjunto de vectores es linealmente independiente ■

Ejemplo 8.2

Indique si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente:

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Debemos ver cómo deben ser las constantes c_1, c_2 y c_3 para que:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

El sistema anterior tiene matriz aumentada que al reducirla queda:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 0 & 5 & 15 & 0 \\ -3 & -2 & -15 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como el sistema tiene infinitas soluciones se deduce que además de la solución $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$ debe tener otras soluciones y en estas otras al menos un coeficiente c debe ser diferente de cero. Por ejemplo, reconvirtiendo los renglones no cero de la matriz reducida a ecuaciones se obtiene: $c_1 + 3c_3 = 0$ y $c_2 + 3c_3 = 0$ es decir, $c_1 = -3c_3$ y $c_2 = -3c_3$. Dando a c_3 un valor diferente de cero (por ejemplo $c_3 = -1$) se pueden obtener coeficientes (siguiendo el ejemplo, $c_1 = 3$ y $c_2 = 3$) que hacen que la combinación lineal de el vector cero. Por tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente ■

8.6. Criterio de dependencia lineal

El principal resultado para caracterizar conjuntos de vectores linealmente independientes es el siguiente:
Teorema

Sea $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en $\mathbf{R}^n$. Son equivalentes los siguientes hechos.

- El conjunto A es linealmente independiente.
- Tiene solución única el sistema $[\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \cdots \mathbf{v}_k|\mathbf{0}]$
- Tiene k pivotes la matriz reducida obtenida de $[\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \cdots \mathbf{v}_k]$

8.7. Conjuntos de dos vectores

El resultado previo indica que para determinar si un conjunto es linealmente independiente habrá que reducir una matriz. Sin embargo, hay situaciones donde no es requerido tal proceso.
Teorema

Son equivalentes los siguientes hechos:

a. El conjunto formado por los dos vectores es l.d.
b. Un vector es un múltiplo escalar del otro.

Demostración
Suficiencia (a $\rightarrow$ b)
Suponga que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ forman un conjunto linelamente dependiente. Entonces existen escalares c_1 y c_2 no ambos cero tal que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

como ambos escalares no son ambos cero, alguno de ellos deberá ser diferente de cero:

- Si $c_1 \neq 0$, entonces de la ecuación anterior podemos depejar $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}_2$$

  y por tanto $\mathbf{x}_1$ en un múltiplo de $\mathbf{x}_2$.

- Si $c_2 \neq 0$, enotnces entonces de la ecuación anterior podemos depejar $\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{c_1}{c_2}\mathbf{x}_1$$

  y por tanto $\mathbf{x}_2$ en un múltiplo de $\mathbf{x}_1$.

Así en cualquier caso uno de los dos vectores es un múltiplo del otro.
Necesidad (b $\rightarrow$ a)
Suponga que $\mathbf{x}_1$ es un múltiplo de $\mathbf{x}_2$. Por tanto, existe un escalar c tal que $\mathbf{x}_1 = c\mathbf{x}_2$. Por tanto, $1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-c) \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Y por consiguiente el conjunto es linealmente dependiente. Lo mismo ocurre en el caso cuando $\mathbf{x}_2$ es un múltiplo de $\mathbf{x}_1$. Por consiguiente, si uno es un múltiplo del otro el conjunto formado por esos evectores será linealmente dependiente $\blacksquare$

8.8. Tamaño de un conjunto independiente

Otra situación donde es fácil verificar si un conjunto es linealmente dependiente es cuando el número de elementos rebasa la dimensión del espacio que los contiene:

Teorema

Si conjunto de vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ es linealmente independiente en $\mathbf{R}^n$ entonces $k \leq n$. Equivalentemente, todo conjunto en $\mathbf{R}^n$ con más de n vectores es linealmente dependiente.

Demostración

Demostremos el resultado por el método de prueba indirecto: veamos que si la conclusión es falsa entonces la hipótesis es falsa.

Supongamos que $k > n$. Por tanto, la matriz formada $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots,\mathbf{v}_k]$ tendrá más columnas que renglones. Así al ser reducida no podrá tener más de n pivotes, es decir el número de pivotes no será k. Por tanto el conjunto de vectores no será linealmente independiente; será linealmente dependiente $\blacksquare$

Ejemplo 8.3

Indique si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Puesto que el conjunto tiene 4 vectores en $\mathbf{R}^2$ es linealmente dependiente: Número de vectores (4) > dimensión del espacio donde están (2).

8.9. Algunas Pruebas de Dependencia Lineal

Hay otras pruebas que no reemplazan a proceso de reducción en lo general, pero cuando aplican ahorran trabajo:

Algunas pruebas de Dependencia Lineal

1. Si el conjunto solo tiene un vector, el conjunto es lineamente dependiente si y sólo si el vector es el vector cero.

2. Si el vector cero pertence a un conjunto de vectores, el conjunto es linealmente dependiente.

3. Si en un conjunto de vectores aparecen vectores repetidos el conjunto es linealmente dependiente.

4. Si el conjunto consta de más de dos vectores: el conjunto es linealmente dependiente si y solamente si un vector del conjunto es combinación lineal de los restantes.

5. Si en un conjunto de vectores uno de ellos es múltiplo escalar de otro el conjunto es linealmente dependiente.

6. Si el conjunto consta de más de dos vectores y el primer vector no es el vector cero: el conjunto es linealmente dependiente si y solamente si un vector del conjunto es combinacion lineal de los vectores **anteriores** en el conjunto.

7. Si un conjunto de vectores contiene un subconjunto de vectores que es linealmente dependiente, el conjunto es a su vez linealmente dependiente.

8. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también será linealmente independiente.

Demostración

1.- $\{\mathbf{x}\}$ es ld. si y sólo si existe $c \neq 0$ tal que $c\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero siendo $c \neq 0$, $c\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por tanto, $\{\mathbf{x}\}$ es ld. si y sólo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2.- $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es ld. pues

$$0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

4.-

Supongamos que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es ld. Entonces, existen escalares c_1, c_2, $\ldots$, c_k no todos cero tal que

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

digamos que $c_i \neq 0$. Por tanto, la ecuación anterior podría ser escrita como

$$c_i\mathbf{x}_i = -c_1 \cdot \mathbf{x}_1 - \cdots - c_{i-1} \cdot \mathbf{x}_{i-1} - c_{i+1} \cdot \mathbf{x}_{i+1} - \cdots - c_k \cdot \mathbf{x}_k$$

Por tanto

$$\mathbf{x}_i = (-c_1/c_i) \cdot \mathbf{x}_1 + \cdots + (-c_{i-1}/c_i) \cdot \mathbf{x}_{i-1} + (-c_{i+1}/c_i) \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + (-c_k/c_i) \cdot \mathbf{x}_k$$

Por consiguiente, el vector $\mathbf{x}_i$ es una combinación lineal de los restantes vectores en el conjunto.
Por otro lado si el vector $\mathbf{x}_i$ fuera combincación lineal de los vectores restantes se tendría que existen c_1, c_2,$\ldots$, c_{i-1}, c_{i+1},$\ldots$,c_k tales que:

$$\mathbf{x}_i = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_{i-1} \cdot \mathbf{x}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + c_k \cdot \mathbf{x}_k$$

De donde

$$(-c_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (-c_2) \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + (-c_{i-1}) \cdot \mathbf{x}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{x}_i + (-c_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + (-c_k) \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

lo cual es una combinación que da el vector cero con no todos los coeficientes cero. Por tanto, el conjunto es linealmente dependiente.

3.- Es un caso particular de **4.**

5.- Es un caso particular de **4.**

6.- Supongamos que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es ld. Entonces, existen escalares c_1, c_2, $\ldots$, c_k no todos cero tal que

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

escojamos el índice mayor tal que $c_{i_o} \neq 0$. Por consiguiente $c_j = 0$ para $i_o < j \leq k$. Note que su $i_o = 1$ entonces La ecuación anterior se reduce a $c_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ y como $c_1 \neq 0$ se puede despejar $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Lo cual no se da en este caso. Por tanto, $i_o > 1$. La ecuación anterior podría ser escrita como

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_{i_o} \cdot \mathbf{x}_{i_o} = \mathbf{0}$$

despejando $\mathbf{x}_{i_o}$ se tiene

$$\mathbf{x}_{i_o} = (-c_1/c_{i_o}) \cdot \mathbf{x}_1 + \cdots + (-c_{i_o-1}/c_{i_o})\mathbf{x}_{i_o-1}$$

Por tanto $\mathbf{x}_{i_o}$ es combinación de los vectores anteriores a él $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,$\ldots$,$\mathbf{x}_{i_o-1}$.
La recíproca de **6.** se prueba en forma análoga a la recíproca **4.**

7.- Supongamos que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es ld. Entonces, existen escalares c_1, c_2, $\ldots$, c_k no todos cero tal que

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

entonces

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k \cdot \mathbf{x}_k + 0 \cdot \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

con no todos los coeficientes cero: alguno de los c_i no era cero. Probando que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}\}$ es ld. Esto prueba que si a un conjunto ld. se le añade un nuevo vector, entonces el conjunto seguirá siendo linealmente dependiente. Repitiendo este proceso se pueden añadir cuantos vectores se desee y siempre se obtendrá un conjunto linealmente dependiente.

8.- Si un subconjunto B de un conjunto de vectores li A no fuera también li, entonces B debería ser ld. por **7.**, en conjunto A debería ser linealmente dependiente. Esto es imposible. Así el subconjunto B debe también ser linealmente independiente ■

Ejemplo 8.4

Indique si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente:

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

El conjunto es linealmente dependiente porque el segundo vector es múltiplo escalar del primero.($\mathbf{x}_2 = 3\mathbf{x}_1$) ■

Ejemplo 8.5

Indique si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente:

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

El conjunto es linealmente dependiente porque el vector cero está en el conjunto: $\mathbf{x}_2 = 0 \cdot \mathbf{x}_1$ ■

Ejemplo 8.6

¿Para qué valor de a el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente?

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Al formar la matriz aumentada y escalonar tenemos:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 0 \\ -2 & a & 0 \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12+a & 0 \end{array} \right]$$

El sistema tendrá solución infinitas cuando $12 + a = 0$, es decir, cuando $a = -12$. Por tanto, para $a = -12$ el conjunto es linealmente dependiente. Mientras que para $a \neq -12$ es linealmente independiente ■

Ejemplo 8.7

Suponga que el conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$$

es linealmente independiente. ¿Será el conjunto

$$\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$$

linealmente independiente?
Solución
Cierto: Puesto que el conjunto es linealmente independiente, cualquier **subconjunto de él** será linealmente independiente ■

Ejemplo 8.8
Suponga que el conjunto
$$\{\mathbf{v}_3,\, \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\}$$
es linealmente dependiente. ¿Será el conjunto
$$\{\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3,\, \mathbf{v}_4,\, \mathbf{v}_5\}$$
linealmente dependiente?
Solución
Cierto: Puesto que el conjunto es linealmente dependiente, cualquier **conjunto que lo contenga** será linealmente dependiente ■

Ejemplo 8.9
Suponga que el conjunto
$$\{\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3,\, \mathbf{v}_4,\, \mathbf{v}_5\}$$
es linealmente dependiente. ¿Será el conjunto
$$\{\mathbf{v}_3,\, \mathbf{v}_5,\, \mathbf{v}_4\}$$
linealmente independiente?
Solución
No se puede deducir ninguna conclusión definitiva: El conjunto puede ser linealmente dependiente o independiente ■

Ejemplo 8.10
Suponga que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ forman un conjunto linealmente independiente. ¿Será el siguiente conjunto linealmente independiente?
$$\{\mathbf{y}_1 = -2\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2,\, \mathbf{y}_2 = 2\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2\}$$
Solución
Buscamos cómo deben ser las constantes c_1 y c_2 para que:
$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$$
Es decir
$$c_1\,(-2\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2) + c_2\,(2\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$
Desarrollando esto queda:
$$(-2c_1 + 2c_2)\,\mathbf{v}_1 + (-2c_1 - 3c_2)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$
Como el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente los coeficientes de la combinación lineal anterior deben ser cero:
$$\begin{array}{rrcrcr} - & 2c_1 & + & 2c_2 & = & 0 \\ - & 2c_1 & - & 3c_2 & = & 0 \end{array}$$
Este sistema tiene solución única $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Por tanto, la única combinación lineal de los vectores $\mathbf{y}$ que da el vector $\mathbf{0}$ es la que tiene coeficientes cero. Por tanto, el conjunto $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ es linealmente independiente ■

Ejemplo 8.11
Considere el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si las columnas de $\mathbf{A}$ forman un conjunto l.d., entonces el sistema

$\boxed{\text{A}}$ no se sabe si tiene solución.

$\boxed{\text{B}}$ tiene infinitas soluciones.

$\boxed{\text{C}}$ tiene solución única.

Solución
Recuerde que la consistencia no depende de si las columnas de $\mathbf{A}$ son un conjunto linealmente independiente. Lo que se tiene es que si $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente entonces habrá solución única si y sólo si las columnas de $\mathbf{A}$ forman un conjunto li. En este caso, la respuesta más conveniente es $\boxed{\text{A}}$: no se sabe si tiene solución ■

Ejemplo 8.12
Suponga que el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene soluciones infinitas para un vector $\mathbf{b}$ particular. ¿El conjunto de las columnas de la matriz de coeficientes será linealmente dependiente?

$\boxed{\text{A}}$ Falso

$\boxed{\text{B}}$ No hay suficiente información para concluir

$\boxed{\text{C}}$ Cierto

Solución
El dato es que $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene soluciones infinitas. Por tanto, $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones infinitas. Por tanto, es cierto que las columnas de $\mathbf{A}$ son dependientes ■

Ejemplo 8.13
Suponga que el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es tal que el conjunto de las columnas de la matriz de coeficientes es linealmente dependiente, qué se puede decir de la solución al sistema?

$\boxed{\text{A}}$ Que si acaso existe solución, entonces hay infinitas soluciones

$\boxed{\text{B}}$ Que si acaso existe solución, entonces es única

$\boxed{\text{C}}$ Que sí existen infinitas soluciones

$\boxed{\text{D}}$ Que sí existe y además es única

Solución
Nuevamente, el dato sólo sirve para describir el comportamiento de las soluciones en caso de haber. La respuesta es que $\boxed{\text{A}}$ Que si acaso existe solución, entonces hay infinitas soluciones ■

Ejemplo 8.14
Suponga que el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $n \times n$ es tal que tiene solución única para un cierto vector $\mathbf{b}$. Para otro vector $\mathbf{b}_1$ será consistente el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$?

$\boxed{\text{A}}$ Consistente o inconsistente, si consistente solución única.

$\boxed{\text{B}}$ Consistente o inconsistente, si es consistente puede tener infinitas.

$\boxed{\text{C}}$ Consistente sin importar $\mathbf{b}_1$ y tiene solución única.

$\boxed{\text{D}}$ No hay información para saber si es consistente.

Solución
Si tiene solución única para un $\mathbf{b}$ se deduce que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. Por tanto, y como $\mathbf{A}$ tiene n columnas, si a $\mathbf{A}$ se le aplica rref quedan n pivotes. Como $\mathbf{A}$ tiene n renglones entonces en la reducida de $\mathbf{A}$ quedarán pivotes en cada renglón. Por tanto, las columnas de $\mathbf{A}$ generan todo $\mathbf{R^n}$. Por consiguiente, para cualquier otro vector $\mathbf{b}_1$ de $\mathbf{R}^n$ el sistema será consistente y tendrá solución única: $\boxed{\text{C}}$ ■

Ejemplo 8.15
Suponga que el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $n \times n$ tiene infinitas soluciones para un cierto vector $\mathbf{b}$. Para otro vector $\mathbf{b}_1$ será consistente el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$?

$\boxed{\text{A}}$ Puede ser consistente o inconsistente, pero si es consistente tendrá solución única.

$\boxed{\text{B}}$ Puede ser consistente o inconsistente, pero si es consistente puede tener soluciones infinitas.

$\boxed{\text{C}}$ El sistema tiene solución sin importar $\mathbf{b}_1$ y tiene soluciones infinitas..

$\boxed{\text{D}}$ No hay información para saber si es consistente.

$\boxed{\text{E}}$ Puede ser consistente o inconsistente, pero si es consistente tiene soluciones infinitas.

Solución
Dado que tiene infinitas soluciones para un $\mathbf{b}$ se deduce que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes. Por tanto, y como $\mathbf{A}$ tiene n columnas, si a $\mathbf{A}$ se le aplica rref quedan menos de n pivotes. Como $\mathbf{A}$ tiene n renglones entonces en la reducida de $\mathbf{A}$ quedarán con algún renglón sin pivote. Por tanto, las columnas de $\mathbf{A}$ no generan todo $\mathbf{R^n}$. Por consiguiente, habrá vectores $\mathbf{b}_1$ de $\mathbf{R}^n$ el sistema podrá ser consistente o inconsistente pero si es consistente seguro tendrá soluciones infinitas: $\boxed{\text{E}}$ ■

Ejemplo 8.16
Suponga que el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $m \times n$ (con $n > m$) es inconsistente para un cierto vector $\mathbf{b}$. Para otro vector $\mathbf{b}_1$ será consistente el sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$?

$\boxed{\text{A}}$ Será siempre inconsistente.

$\boxed{\text{B}}$ Puede ser consistente o inconsistente, pero si es consistente puede tener soluciones infinitas o solución única.

$\boxed{\text{C}}$ El sistema tiene solución sin importar $\mathbf{b}_1$ y tiene soluciones infinitas.

$\boxed{\text{D}}$ No hay información para saber si tendrá soluciones infinitas o única.

$\boxed{\text{E}}$ Puede ser consistente o inconsistente, pero si es consistente tiene soluciones infinitas.

Solución
Dado que el número de columnas de $\mathbf{A}$ es mayor que el número de renglones, entonces después de reducir $\mathbf{A}$ quedarán a lo más m pivotes, que será menor que n. Por consiguiente las columnas de $\mathbf{A}$ formará un conjunto linealmente dependiente. Esto implicará de que en cualquier otro $\mathbf{b}_1$ para $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ consistente el sistema tendrá soluciones infinitas. El hecho de que $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea inconsistente para un cierto $\mathbf{b}$ indica que las columnas de $\mathbf{A}$ no generan a todo $\mathbf{R}^m$. Por tanto, habrá muchos $\mathbf{b}_1$ para los cuales es inconsistente. Resumiendo, el sistema podrá ser consistente o inconsistente y en el caso que sea consistente el sistema tendrá soluciones infinitas $\boxed{\text{E}}$ ■

8.10. Resultados teóricos

Veremos ahora un par de resultados que servirán para elaborar la teoría de la dimensión y que son relativos al concepto de dependencia lineal:

Teorema

Si el conjunto $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente entonces:

a. Cualquier vector $\mathbf{y}$ en el generado por S, se puede escribir en forma única como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$,…,$\mathbf{v}_k$.

b. Si $\mathbf{v}_{k+1}$ no pertenece al generado por S_1, entonces el nuevo conjunto $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ es linealmente independiente.

Demostración

Demostración de a.

Sea un vector cualquiera $\mathbf{y}$ en $\text{Gen}(S_1)$, y supongamos que existen escalares a_1,a_2,…,a_k y escalares b_1,b_2,…,b_k tales que

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$$

Así

$$(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

como el conjunto S_1 es li todos los coeficientes de esta relación deben ser cero. Así para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $a_i = b_i$. Es decir, que ambas formas de obtener $\mathbf{y}$ son únicas.

Demostración de b.

Razonemos por contradicción

Supongamos que el conjunto fuera ld. Como el conjunto S_1 era li, el vector $\mathbf{v}_1$ debe ser diferente de cero. Pues en caso contrario el vector cero pertenecería a S_1 y por tanto S_1 debería ser ld. Por un teorema anterior debe existir un vector de S_2 que es combinación lineal de los vectores anteriores a él en S_2. Este vector sólo tiene dos posibilidades:

- ser $\mathbf{v}_{k+1}$
  este caso es imposible pues $\mathbf{v}_{k+1}$ no pertenece a $\text{Gen}(S_1)$.
- ser $\mathbf{v}_i$ con $1 \leq i \leq k$
  este caso es imposible pues implicaría que S_1 es linealmente dependiente.

Por tanto, el supuesto que S_2 sea ld nos lleva a una contradicción lógica. Así S_2 debe ser linealmente independiente ■