Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Sucesiones y Series

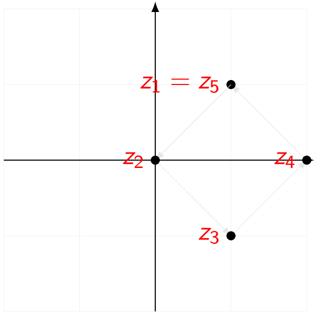
Departamento de Matemáticas

MA3002

Sucesión

Una sucesión, representada matemáticamente como $\{z_n\}$, es una función cuyo dominio son los enteros positivos $(1, 2, 3, 4, \ldots)$; en otras palabras, a cada entero $n = 1, 2, 3 \ldots$ se le asigna un número complejo z_n. Por ejemplo, la sucesión $\{1 + \mathbf{i}^n\}$ representaría la función

n	1	2	3	4	5	...
z_n	$1+\mathbf{i}$	0	$1-\mathbf{i}$	2	$1+\mathbf{i}$	...



Límite de una Sucesión

Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ converge al valor L si *para cualquier medida de cercanía* $\epsilon > 0$ existe una posición n_o a partir de la cual todos los terminos siguientes de la sucesión aproximan a L con un error menor que ϵ; es decir, distan de L en menos que ϵ:

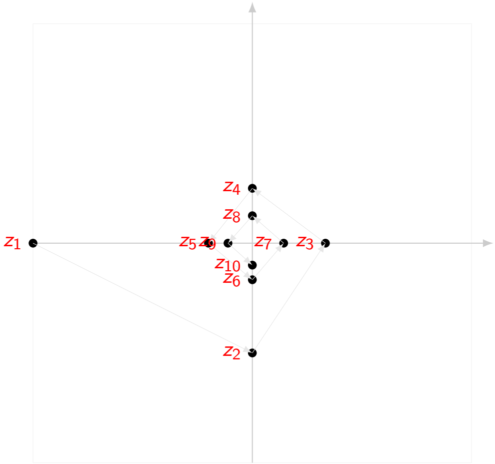
$$\forall i > n_o : \; |z_i - L| < \epsilon$$

Esto se simboliza como

$$\lim_{n \to \infty} z_n = L$$

Ejemplo

La sucesión $\left\{\frac{\mathbf{i}^{n+1}}{n}\right\}$ converge a 0.

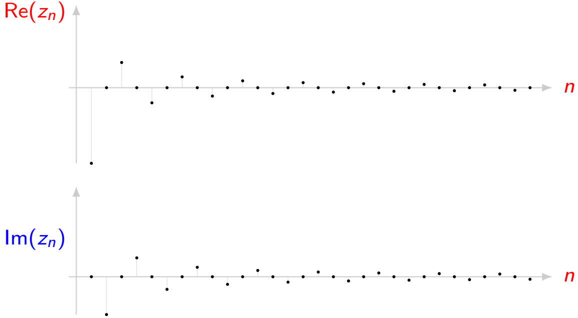


Resultados sobre límites

- Una sucesión $\{z_n\}$ converge al número complejo L si y sólo si $\mathrm{Re}(z_n)$ converge a $\mathrm{Re}(L)$ y $\mathrm{Im}(z_n)$ converge a $\mathrm{Im}(L)$.

Para la sucesión $\left\{ z_n = \frac{\mathbf{i}^{n+1}}{n} \right\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
z_n	-1	$-1/2\,\mathbf{i}$	$1/3$	$1/4\,\mathbf{i}$	$-1/5$	$-1/6\,\mathbf{i}$	$1/7$	$1/8\,\mathbf{i}$
$\mathrm{Re}(z_n)$	-1	0	$1/3$	0	$-1/5$	0	$1/7$	0
$\mathrm{Im}(z_n)$	0	$-1/2$	0	$1/4$	0	$-1/6$	0	$1/8$



Ejemplos sobre sucesiones

- Escriba los primeros cinco términos de la sucesión dada:

$$1.\ \{5\,\mathbf{i}^n\} \quad 2.\ \left\{1+e^{n\,\pi\,\mathbf{i}}\right\}$$

- Determine si la sucesión converge:

$$3.\ \left\{\frac{3\,n\,\mathbf{i}+2}{n+n\,\mathbf{i}}\right\} \quad 4.\ \left\{\frac{n\,\mathbf{i}+2^n}{3\,n\,\mathbf{i}+5^n}\right\}$$

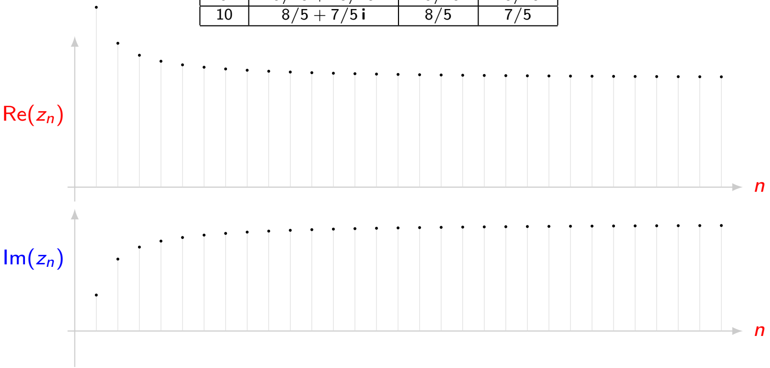
- Calcule el límite de:

$$5.\ \left\{\frac{4\,n+3\,n\,\mathbf{i}}{2\,n+\mathbf{i}}\right\} \quad 6.\ \left\{\left(\frac{1+\mathbf{i}}{4}\right)^n\right\}$$

Ejemplo, inciso 3 anterior

Para la sucesión $\left\{ z_n = \frac{3\,n\,\mathbf{i}+2}{n+n\,\mathbf{i}} \right\}$

n	z_n	$\mathrm{Re}(z_n)$	$\mathrm{Im}(z_n)$
1	$5/2 + 1/2\,\mathbf{i}$	$5/2$	$1/2$
2	$2 + \mathbf{i}$	2	1
3	$11/6 + 7/6\,\mathbf{i}$	$11/6$	$7/6$
4	$7/4 + 5/4\,\mathbf{i}$	$7/4$	$5/4$
5	$17/10 + 13/10\,\mathbf{i}$	$17/10$	$13/10$
6	$5/3 + 4/3\,\mathbf{i}$	$5/3$	$4/3$
7	$23/14 + 19/14\,\mathbf{i}$	$23/14$	$19/14$
8	$13/8 + 11/8\,\mathbf{i}$	$13/8$	$11/8$
9	$29/18 + 25/18\,\mathbf{i}$	$29/18$	$25/18$
10	$8/5 + 7/5\,\mathbf{i}$	$8/5$	$7/5$



Series

- Una serie infinita de números complejos es una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

- Una serie como la anterior se dice que es convergente si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

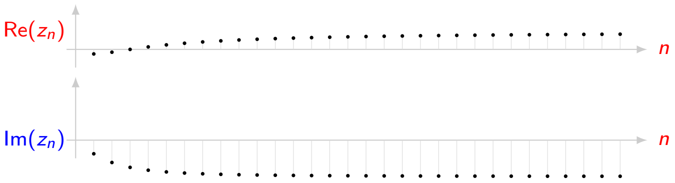
converge. Si $S_n \to L$ cuando $n \to \infty$ diremos que la suma de la serie es L.

Ejemplos sobre series

Determine la fórmula para la sucesión de sumas parciales de

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+2\,\mathbf{i}}-\frac{1}{k+1+2\,\mathbf{i}}\right]$$

n	S_n	$\text{Re}(S_n)$	$\text{Im}(S_n)$
1	$-1/20-3/20\,\mathbf{i}$	$-1/20$	$-3/20$
2	$-2/65-16/65\,\mathbf{i}$	$-2/65$	$-16/65$
3	$-3/10\,\mathbf{i}$	0	$-3/10$
4	$4/145-48/145\,\mathbf{i}$	$4/145$	$-48/145$
5	$1/20-7/20\,\mathbf{i}$	$1/20$	$-7/20$
6	$18/265-96/265\,\mathbf{i}$	$18/265$	$-96/265$
7	$7/85-63/170\,\mathbf{i}$	$7/85$	$-63/170$
8	$8/85-32/85\,\mathbf{i}$	$8/85$	$-32/85$
9	$27/260-99/260\,\mathbf{i}$	$27/260$	$-99/260$
10	$14/125-48/125\,\mathbf{i}$	$14/125$	$-48/125$



Serie Geométrica

- Una serie geométrica es una serie de la forma:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1} = a + a\, r + a\, r^2 + a\, r^3 + \cdots + a\, r^{n-1} + \cdots$$

- Primera ventaja de las series geométricas: Si S_n es la n-ésima sima parcial
$$S_n = a + a\, r + a\, r^2 + \cdots + a\, r^{n-1}$$
entonces
$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

- Segunda ventaja de las series geométricas: Resultados sobre la convergencia: Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica converge y converge al valor
$$\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1} \to \frac{a}{1 - r}$$
Si $|r| \geq 1$,entonces la serie geométrica diverge.

Ejemplos sobre series geométricas

Determine si existe el valor de cada serie:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} 4\,\mathbf{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^{k}$$
3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{k}$$
4. $$\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2\,\mathbf{i}}\right)^{k}$$

Observe que la serie geométrica inicia en $k=1$ y que el exponente de r debe ser $k-1$. Esto es equivalente si inicia en $k=0$ y el exponente es k.

Ejemplos sobre series geométricas

Determine si existe el valor de cada serie:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4\,\mathbf{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$: $a = 4\,\mathbf{i}, |r = 1/3| = 1/3,$ convergente
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^{k}$: $a = \mathbf{i}/2, |r = \mathbf{i}/2| = 1/2 < 1,$ convergente
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{k}$: $a = \mathbf{i}/2, |r = \mathbf{i}| = 1,$ no se sabe
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2\,\mathbf{i}}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2\,\mathbf{i}}\right)^{k-1}$, convergente

Observe que la serie geométrica inicia en $k = 1$ y que el exponente de r debe ser $k - 1$. Esto es equivalente si inicia en $k = 0$ y el exponente es k.

Resultados

- Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge, entonces $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.
- La contrapositiva de la implicación anterior es también cierta: Si $\lim_{k\to\infty} z_k \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

Concepto

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es absolutamente convergente si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge.

Prueba de la Razón

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie geométrica de términos complejos no nulos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$$

entonces:

1. Si $L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.
2. Si $L > 1$ o bien $L = \infty$, entonces la serie diverge.
3. Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Prueba de la Raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie geométrica de términos complejos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$$

entonces:

1. Si $L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.
2. Si $L > 1$ o bien $L = \infty$, entonces la serie diverge.
3. Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Series de Potencias

Una serie de potencias en $z - z_o$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k = a_0 + a_1 (z - z_o) + a_2 (z - z_o)^2 + \cdots$$

Diremos que la serie está centrada en z_o y que el centro de la serie es z_o. Todas las series de potencias complejas tienen un radio de convergencia R. El equivalente al intervalo de convergencia para series de potencias reales es el círculo de convergencia definido por $|z - z_o| = R$ para cuando $0 < R < \infty$. El radio de convergencia puede ser

1. $R = 0$, en cuyo caso sólo hay convergencia para $z = z_o$.
2. $R = \infty$, en cuyo caso la serie converge para cualquier z.
3. R es un número finito, en cuyo caso la serie converge en el interior de los puntos del círculo $|z - z_o| = R$.

Ejemplo

Determine la región de convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, z^{k+1}$$

Aplique el criterio de la razón.

Ejemplo

Determine la región de convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, z^{k+1}$$

Aplique el criterio de la razón.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k+1}\, z^{k+2}}{\frac{1}{k}\, z^{k+1}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{k+1}\, z \right| \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| \right) \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z|
\end{aligned}$$

La convergencia requiere que $|z| < 1$; el radio de convergencia es 1. Se debe interpretar que para que exista convergencia de la serie de potencias el valor de z debe tener módulo menor que 1.

Radio de convergencia

Para una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k = a_0 + a_1 (z - z_o) + a_2 (z - z_o)^2 + \cdots$$

al aplicar el criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_o)^{n+1}}{a_n (z - z_o)^n} \right| = |z - z_o| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z - z_o| \cdot L$$

podemos concluir que si

1. $L \neq 0$, el radio de convergencia es $R = 1/L$.
2. $L = 0$, el radio de convergencia es infinito. Hay convergencia para todo valor de z.
3. $L = \infty$, el radio de convergencia es $R = 0$.

Ejemplos sobre series de potencias

Determine la ROC de cada serie:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}(z-(1+\mathbf{i}))^k$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6\,k+1}{2\,k+5}\right)^k (z-2\,\mathbf{i})^k$$

Desarrollo de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D y sea z_o un punto de D. Entonces $f(z)$ se representa como la seerie de potencias:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} \, (z - z_o)^k$$

Cuando $z_o = 0$ el desarrollo se llama la Serie de Maclaurin.

Series a conocer:

1. $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$
2. $\operatorname{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!} z^{2\,k+1}$
3. $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k)!} z^{2\,k}$

Ejemplos sobre series de potencias

Determine los series de

1. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$ en $z_o = 0$
2. $f(z) = e^{2\,z}$ en $z_o = 0$
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $z_o = 1$

A veces es conveniente usar:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Transformada z

Dada una sucesión de número complejos $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ se construye la función compleja:

$$C(z) = c_o + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + c_3 \frac{1}{z^3} + \cdots$$

Ejemplos sobre Transformada z

Determine la transformada z de cada una de las sucesiones:

1. $c_n = \{e^{a\,n}\}$

Propiedad 1:

Suponga que la señal discreta $\{c_n\}$ tiene como transformada z la función compleja $C(z)$ entonces la señal $\{n\,c_n\}$ tendrá como transformada:

$$-z\,\frac{dC(z)}{dz}$$